

# Interpolation räumlicher Kurven mit Anwendungen auf die Vliesstoffproduktion

Bachelorarbeit von Julius Busse

*Achilles: "I wish my wish would not be granted!"*

~Douglas R. Hofstadter

11. Januar 2022

<https://julius-gs.de/bachelorarbeit>

## Zusammenfassung

- Vorstellung Modellierungsproblem diskretisierter dreidimensionaler Faden

## Definition Vliesstoff

## Zusammenfassung

- Vorstellung Modellierungsproblem diskretisierter dreidimensionaler Faden
- Herleitung Gleichungssysteme für kubische Splineinterpolation mit natürlichen oder Hermite-Randbedingungen

## Definition Vliesstoff

## Zusammenfassung

- Vorstellung Modellierungsproblem diskretisierter dreidimensionaler Faden
- Herleitung Gleichungssysteme für kubische Splineinterpolation mit natürlichen oder Hermite-Randbedingungen
- Behandlung von Minimaleigenschaften und Fehlerabschätzungen

## Definition Vliesstoff

## Zusammenfassung

- Vorstellung Modellierungsproblem diskretisierter dreidimensionaler Faden
- Herleitung Gleichungssysteme für kubische Splineinterpolation mit natürlichen oder Hermite-Randbedingungen
- Behandlung von Minimaleigenschaften und Fehlerabschätzungen
- Lösung des Modellierungsproblems am Würfelgitter

## Definition Vliesstoff

## Zusammenfassung

- Vorstellung Modellierungsproblem diskretisierter dreidimensionaler Faden
- Herleitung Gleichungssysteme für kubische Splineinterpolation mit natürlichen oder Hermite-Randbedingungen
- Behandlung von Minimaleigenschaften und Fehlerabschätzungen
- Lösung des Modellierungsproblems am Würfelgitter

## Definition Vliesstoff

- Der europäische Dachverband für Vliesstoffproduktion definiert Vliesstoffe als

## Zusammenfassung

- Vorstellung Modellierungsproblem diskretisierter dreidimensionaler Faden
- Herleitung Gleichungssysteme für kubische Splineinterpolation mit natürlichen oder Hermite-Randbedingungen
- Behandlung von Minimaleigenschaften und Fehlerabschätzungen
- Lösung des Modellierungsproblems am Würfelgitter

## Definition Vliesstoff

- Der europäische Dachverband für Vliesstoffproduktion definiert Vliesstoffe als
- bestimmte Anordnungen von Fasern nicht näher spezifizierter Art, Länge und von beliebigem Durchmesser

## Zusammenfassung

- Vorstellung Modellierungsproblem diskretisierter dreidimensionaler Faden
- Herleitung Gleichungssysteme für kubische Splineinterpolation mit natürlichen oder Hermite-Randbedingungen
- Behandlung von Minimaleigenschaften und Fehlerabschätzungen
- Lösung des Modellierungsproblems am Würfelgitter

## Definition Vliesstoff

- Der europäische Dachverband für Vliesstoffproduktion definiert Vliesstoffe als
- bestimmte Anordnungen von Fasern nicht näher spezifizierter Art, Länge und von beliebigem Durchmesser
- werden durch physikalische oder chemische Methoden zusammengehalten

## Zusammenfassung

- Vorstellung Modellierungsproblem diskretisierter dreidimensionaler Faden
- Herleitung Gleichungssysteme für kubische Splineinterpolation mit natürlichen oder Hermite-Randbedingungen
- Behandlung von Minimaleigenschaften und Fehlerabschätzungen
- Lösung des Modellierungsproblems am Würfelgitter

## Definition Vliesstoff

- Der europäische Dachverband für Vliesstoffproduktion definiert Vliesstoffe als
- bestimmte Anordnungen von Fasern nicht näher spezifizierter Art, Länge und von beliebigem Durchmesser
- werden durch physikalische oder chemische Methoden zusammengehalten
- ohne Verwendung von Methoden wie Weben, Zusammenknüpfen oder solche aus der Papierherstellung

## Anwendung von Vliesstoffen

- Vliesstoffe werden für viele Anwendungsbereiche in der Industrie verwendet, etwa für

## Vliesstoffe in FFP-2-Atenschutzmasken

## Anwendung von Vliesstoffen

- Vliesstoffe werden für viele Anwendungsbereiche in der Industrie verwendet, etwa für
- Wärmeisolation

## Vliesstoffe in FFP-2-Atenschutzmasken

## Anwendung von Vliesstoffen

- Vliesstoffe werden für viele Anwendungsbereiche in der Industrie verwendet, etwa für
- Wärmeisolation
- Flüssigkeitsfiltration

## Vliesstoffe in FFP-2-Atenschutzmasken

## Anwendung von Vliesstoffen

- Vliesstoffe werden für viele Anwendungsbereiche in der Industrie verwendet, etwa für
- Wärmeisolation
- Flüssigkeitsfiltration
- *Produktion von Atemschutzmasken*

## Vliesstoffe in FFP-2-Atemschutzmasken

## Anwendung von Vliesstoffen

- Vliesstoffe werden für viele Anwendungsbereiche in der Industrie verwendet, etwa für
- Wärmeisolation
- Flüssigkeitsfiltration
- *Produktion von Atemschutzmasken*

## Vliesstoffe in FFP-2-Atemschutzmasken

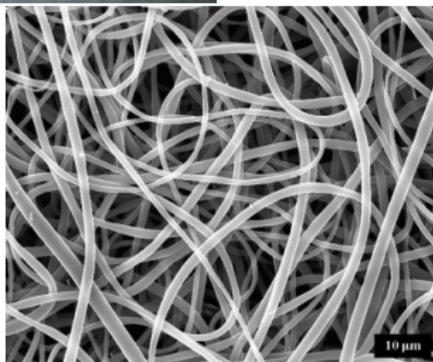
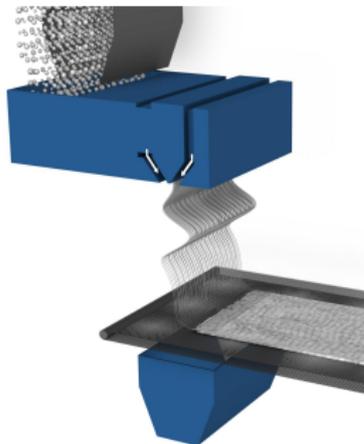
- Die inneren Schichten von FFP-2-Atemschutzmasken bestehen aus Vliesstoffen, welche mit *Meltblown*-Verfahren hergestellt werden

## Anwendung von Vliesstoffen

- Vliesstoffe werden für viele Anwendungsbereiche in der Industrie verwendet, etwa für
- Wärmeisolation
- Flüssigkeitsfiltration
- *Produktion von Atemschutzmasken*

## Vliesstoffe in FFP-2-Atemschutzmasken

- Die inneren Schichten von FFP-2-Atemschutzmasken bestehen aus Vliesstoffen, welche mit *Meltblown*-Verfahren hergestellt werden
- Geschmolzener Kunststoff wird durch feine Düsen in einen Luftschicht gespritzt und dort verwirbelt, die Fäden legen sich dann auf die Vliesablage



## Bewegung der Luft im Luftschacht

- Wir wollen nun die Luft im Luftschacht modellieren



## Bewegung der Luft im Luftschacht

- Wir wollen nun die Luft im Luftschacht modellieren
- Ohne Betrachtung der Temperaturabgabe der Fäden an die Umgebung erhalten wir keine gute Approximation an die Realität



## Bewegung der Luft im Luftschacht

- Wir wollen nun die Luft im Luftschacht modellieren
- Ohne Betrachtung der Temperaturabgabe der Fäden an die Umgebung erhalten wir keine gute Approximation an die Realität
- Also: Modelliere für jeden einzelnen heißen Faden die Temperaturabgabe an die Umgebung



## Aufistung bekannter Parameter

- Ein durch eine Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebener Faden soll in einem Luftschacht modelliert werden

## Problemstellung

## Aufistung bekannter Parameter

- Ein durch eine Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebener Faden soll in einem Luftschacht modelliert werden
- Die Funktion  $t, d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben Temperatur und Dicke dieses Fadens

## Problemstellung

## Aufistung bekannter Parameter

- Ein durch eine Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebener Faden soll in einem Luftschacht modelliert werden
- Die Funktion  $t, d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben Temperatur und Dicke dieses Fadens
- Gitter  $G$  gegeben, das ein Teil des  $\mathbb{R}^3$  ausfüllt

## Problemstellung

## Aufistung bekannter Parameter

- Ein durch eine Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebener Faden soll in einem Luftschacht modelliert werden
- Die Funktion  $t, d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben Temperatur und Dicke dieses Fadens
- Gitter  $G$  gegeben, das ein Teil des  $\mathbb{R}^3$  ausfüllt
- Die Werte  $f(x) \in \mathbb{R}^3$ , sowie  $d(x), t(x) \in \mathbb{R}$  sind auf der äquidistanten Unterteilung  $\Delta_n := \{0 = x_0 < \dots < x_n = 1\}$  gegeben

## Problemstellung

## Aufistung bekannter Parameter

- Ein durch eine Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebener Faden soll in einem Luftschacht modelliert werden
- Die Funktion  $t, d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben Temperatur und Dicke dieses Fadens
- Gitter  $G$  gegeben, das ein Teil des  $\mathbb{R}^3$  ausfüllt
- Die Werte  $f(x) \in \mathbb{R}^3$ , sowie  $d(x), t(x) \in \mathbb{R}$  sind auf der äquidistanten Unterteilung  $\Delta_n := \{0 = x_0 < \dots < x_n = 1\}$  gegeben
- $f$  ist an den Intervallrändern differenzierbar mit bekannter Ableitung

## Problemstellung

## Aufistung bekannter Parameter

- Ein durch eine Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebener Faden soll in einem Luftschacht modelliert werden
- Die Funktion  $t, d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben Temperatur und Dicke dieses Fadens
- Gitter  $G$  gegeben, das ein Teil des  $\mathbb{R}^3$  ausfüllt
- Die Werte  $f(x) \in \mathbb{R}^3$ , sowie  $d(x), t(x) \in \mathbb{R}$  sind auf der äquidistanten Unterteilung  $\Delta_n := \{0 = x_0 < \dots < x_n = 1\}$  gegeben
- $f$  ist an den Intervallrändern differenzierbar mit bekannter Ableitung

## Problemstellung

- Finde eine Funktion  $s_f$ , welche  $f$  interpoliert und die wir auch zwischen den Stützstellen auswerten können

## Aufistung bekannter Parameter

- Ein durch eine Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebener Faden soll in einem Luftschacht modelliert werden
- Die Funktion  $t, d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben Temperatur und Dicke dieses Fadens
- Gitter  $G$  gegeben, das ein Teil des  $\mathbb{R}^3$  ausfüllt
- Die Werte  $f(x) \in \mathbb{R}^3$ , sowie  $d(x), t(x) \in \mathbb{R}$  sind auf der äquidistanten Unterteilung  $\Delta_n := \{0 = x_0 < \dots < x_n = 1\}$  gegeben
- $f$  ist an den Intervallrändern differenzierbar mit bekannter Ableitung

## Problemstellung

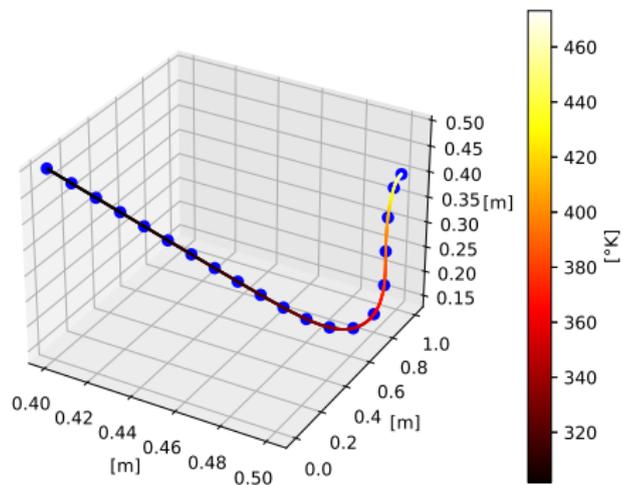
- Finde eine Funktion  $s_f$ , welche  $f$  interpoliert und die wir auch zwischen den Stützstellen auswerten können
- Analoge Funktionen  $s_t$  und  $s_d$  für  $t$  und  $d$  finden

## Aufistung bekannter Parameter

- Ein durch eine Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegebener Faden soll in einem Luftschacht modelliert werden
- Die Funktion  $t, d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben Temperatur und Dicke dieses Fadens
- Gitter  $G$  gegeben, das ein Teil des  $\mathbb{R}^3$  ausfüllt
- Die Werte  $f(x) \in \mathbb{R}^3$ , sowie  $d(x), t(x) \in \mathbb{R}$  sind auf der äquidistanten Unterteilung  $\Delta_n := \{0 = x_0 < \dots < x_n = 1\}$  gegeben
- $f$  ist an den Intervallrändern differenzierbar mit bekannter Ableitung

## Problemstellung

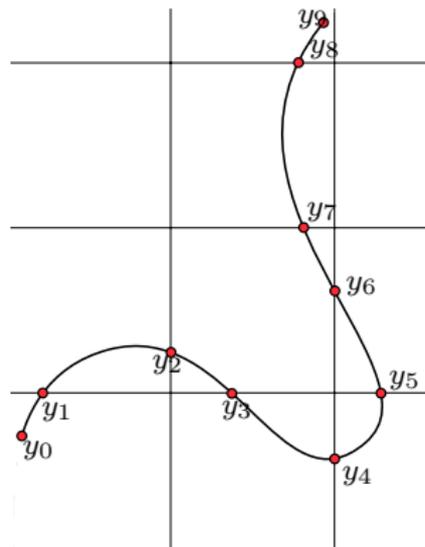
- Finde eine Funktion  $s_f$ , welche  $f$  interpoliert und die wir auch zwischen den Stützstellen auswerten können
- Analoge Funktionen  $s_t$  und  $s_d$  für  $t$  und  $d$  finden
- Für jedes Gitterelement von  $G$  die Fadenlänge und die durchschnittliche Temperatur bzw. Fadendicke des enthaltenen Fadens annähern



**Abbildung:** Durch Bézier-Kurven mit Hermite-Randbedingungen interpolierter Faden mit durch Bézier-Kurven mit natürlichen Randbedingungen interpolierter Temperatur.

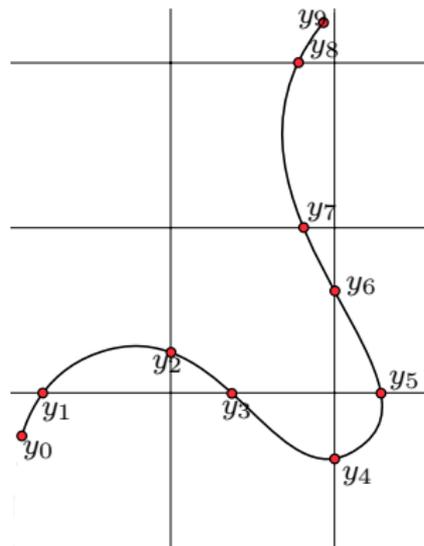
## Erläuterung der weiteren Vorgehensweise

- Interpoliere  $f$ ,  $t$  und  $d$  durch geeignete kubische Splinekurven  $s_f$ ,  $s_t$  und  $s_d$



## Erläuterung der weiteren Vorgehensweise

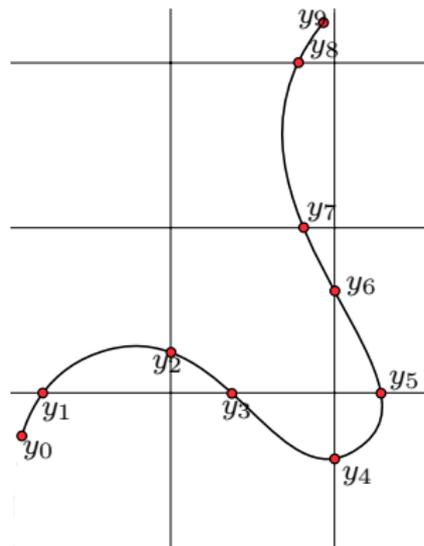
- Interpoliere  $f$ ,  $t$  und  $d$  durch geeignete kubische Splinekurven  $s_f$ ,  $s_t$  und  $s_d$
- Berechne die Schnittpunkte von  $s_f$  mit den Grenzen zwischen den Gitterelement des Gitters  $G$  ( $\{y_j\}$ )



## Erläuterung der weiteren Vorgehensweise

- Interpoliere  $f$ ,  $t$  und  $d$  durch geeignete kubische Splinekurven  $s_f$ ,  $s_t$  und  $s_d$
- Berechne die Schnittpunkte von  $s_f$  mit den Grenzen zwischen den Gitterelement des Gitters  $G$  ( $\{y_j\}$ )
- Berechne das Integral

$$L_j := \int_{y_j}^{y_{j+1}} |s'_f(x)| dx$$



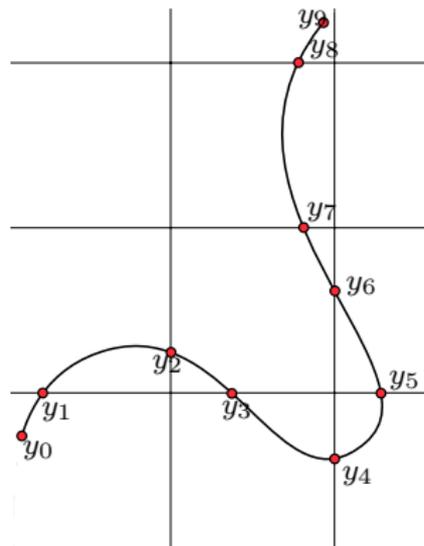
## Erläuterung der weiteren Vorgehensweise

- Interpoliere  $f$ ,  $t$  und  $d$  durch geeignete kubische Splinekurven  $s_f$ ,  $s_t$  und  $s_d$
- Berechne die Schnittpunkte von  $s_f$  mit den Grenzen zwischen den Gitterelement des Gitters  $G$  ( $\{y_j\}$ )
- Berechne das Integral

$$L_j := \int_{y_j}^{y_{j+1}} |s'_f(x)| dx$$

- Berechne die Integrale

$$T_j := \int_{y_j}^{y_{j+1}} t(s) ds, \quad D_j := \int_{y_j}^{y_{j+1}} d(s) ds$$



## Erläuterung der weiteren Vorgehensweise

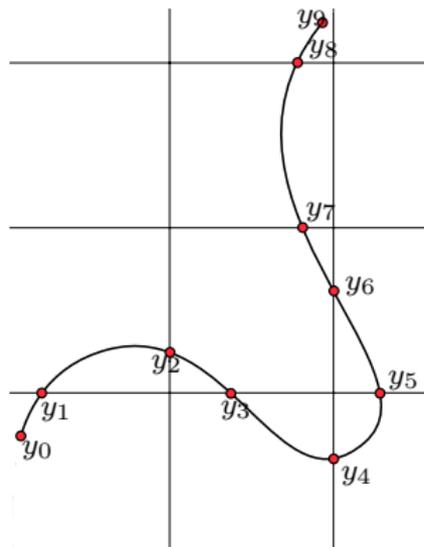
- Interpoliere  $f$ ,  $t$  und  $d$  durch geeignete kubische Splinekurven  $s_f$ ,  $s_t$  und  $s_d$
- Berechne die Schnittpunkte von  $s_f$  mit den Grenzen zwischen den Gitterelement des Gitters  $G$  ( $\{y_j\}$ )
- Berechne das Integral

$$L_j := \int_{y_j}^{y_{j+1}} |s'_f(x)| dx$$

- Berechne die Integrale

$$T_j := \int_{y_j}^{y_{j+1}} t(s) ds, \quad D_j := \int_{y_j}^{y_{j+1}} d(s) ds$$

- Der Mittelwert der Temperatur ergibt sich als  $T_j/(y_{j+1} - y_j)$  und der Mittelwert der Dicke als  $D_j/(y_{j+1} - y_j)$



## Definition: Splines

Zu einer Zerlegung  $\Delta_n := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  definieren wir die Menge

$$S_m(\Delta_n) := \{s \in C^{m-1}[a, b] : s|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \Pi_m, j = 0, \dots, n-1\}$$

(Menge der *Splines vom Grad  $m$  zur Zerlegung  $\Delta_n$* )

## Definition: Splines

Zu einer Zerlegung  $\Delta_n := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  definieren wir die Menge

$$S_m(\Delta_n) := \{s \in C^{m-1}[a, b] : s|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \Pi_m, j = 0, \dots, n-1\}$$

(Menge der *Splines vom Grad  $m$  zur Zerlegung  $\Delta_n$* )

## Lemma von Holladay

Wenn eine Funktion  $f \in C^2[a, b]$  und ein kubischer Spline  $s \in S^3(\Delta_n)$  in den Knoten übereinstimmen, so gilt

$$\|f'' - s''\|_2^2 = \|f''\|_2^2 - \|s''\|_2^2 - 2 \left( [f' - s']s'' \right) (x) \Big|_{x=a}^b$$

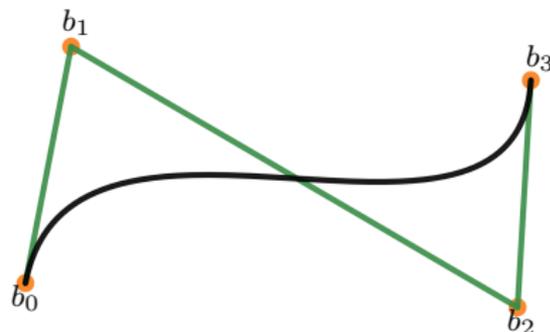
## Form von kubischen Bézier-Polynomen

Allgemeine kubische Bézier-Polynome haben die Form

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) b_i \\ &= (1-t)^3 b_0 + 3t(1-t)^2 b_1 \\ &\quad + 3t^2(1-t) b_2 + t^3 b_3, \end{aligned}$$

wobei die  $B_i^n(t)$  (*Bernstein-Polynome*) wie folgt definiert sind:

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$



## Bézier-Kurven

Als kubische Bézier-Kurven bezeichnet man  $C^2$ -Konstruktionen, welche stückweise aus kubischen Bézier-Polynomen bestehen

### Konkrete Konstruktion von Interpolationen mit Bézier-Kurven

- Setze  $f_i := f(x_i)$

### Konkrete Konstruktion von Interpolationen mit Bézier-Kurven

- Setze  $f_i := f(x_i)$
- Wir nutzen die  $n$  Polynome

$$s_i(t) := (1-t)^3 f_i + 3t(1-t)^2 \alpha_i + 3t^2(1-t) \beta_i + t^3 f_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

## Konkrete Konstruktion von Interpolationen mit Bézier-Kurven

- Setze  $f_i := f(x_i)$
- Wir nutzen die  $n$  Polynome

$$s_i(t) := (1-t)^3 f_i + 3t(1-t)^2 \alpha_i + 3t^2(1-t) \beta_i + t^3 f_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

- Gesucht sind also  $\alpha_i, \beta_i$ , sodass

$$s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) := \begin{cases} s_i(nt - \lfloor nt \rfloor), & \text{wenn } \lfloor nt \rfloor = i \text{ und } t \neq 1 \\ s_{n-1}(1), & \text{wenn } t = 1 \end{cases}$$

für  $i = 0, \dots, n-1$  zweimal stetig diffbar wird

## Ableitungen der Bézier-Polynome

$$s_i(t) := (1-t)^3 f_i + 3t(1-t)^2 \alpha_i + 3t^2(1-t) \beta_i + t^3 f_{i+1}$$

$$s'_i(t) = 2 \left[ -(1-t)^2 f_i + (1-3t)(1-t) \alpha_i + t(2-3t) \beta_i + t^2 f_{i+1} \right]$$

$$s''_i(t) = 6 \left[ (1-t) f_i + (3t-2) \alpha_i + (1-3t) \beta_i + t f_{i+1} \right]$$

$$(i = 0, \dots, n-1)$$

## Ableitungen der Bézier-Polynome

$$s_i(t) := (1-t)^3 f_i + 3t(1-t)^2 \alpha_i + 3t^2(1-t) \beta_i + t^3 f_{i+1}$$

$$s'_i(t) = 2 \left[ -(1-t)^2 f_i + (1-3t)(1-t) \alpha_i + t(2-3t) \beta_i + t^2 f_{i+1} \right]$$

$$s''_i(t) = 6 \left[ (1-t) f_i + (3t-2) \alpha_i + (1-3t) \beta_i + t f_{i+1} \right]$$

$$(i = 0, \dots, n-1)$$

## Bedingungen für das LGS

$$s'_{i-1}(1) = s'_i(0) \Leftrightarrow \alpha_i + \beta_{i-1} = 2f_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$s''_{i-1}(1) = s''_i(0) \Leftrightarrow \alpha_{i-1} + 2\alpha_i = 2\beta_{i-1} + \beta_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

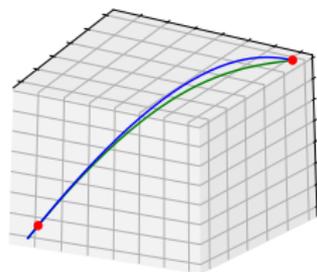
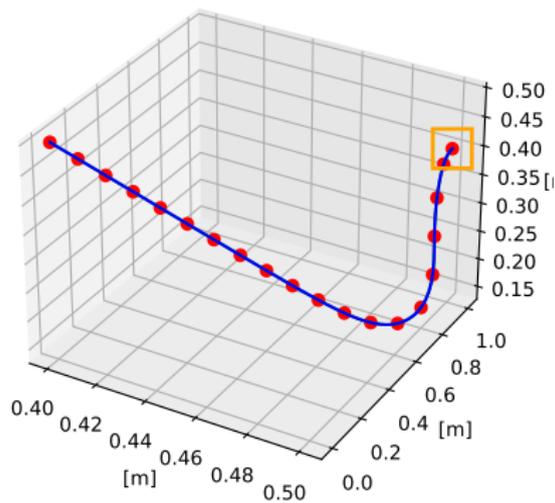
$$s''_0(0) = 0 \Leftrightarrow f_0 - 2\alpha_0 + \beta_0 = 0$$

$$s''_{n-1}(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_{n-1} - 2\beta_{n-1} + f_n = 0$$

$$s'_0(0) = f'(0)/n \Leftrightarrow 3\alpha_0 = 3f_0 + f'(0)/n$$

$$s'_{n-1}(1) = f'(1)/n \Leftrightarrow 3\alpha_{n-2} + 12\alpha_{n-1} = 3f_n + 12f_{n-1} - f'(1)/n$$





Bézier-Interpolation einer räumlichen Kurve mit natürlichen und Hermite-Randbedingungen.

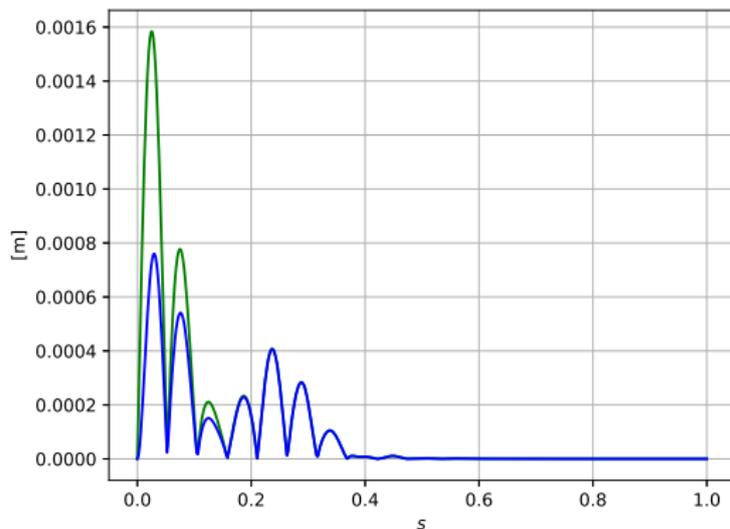
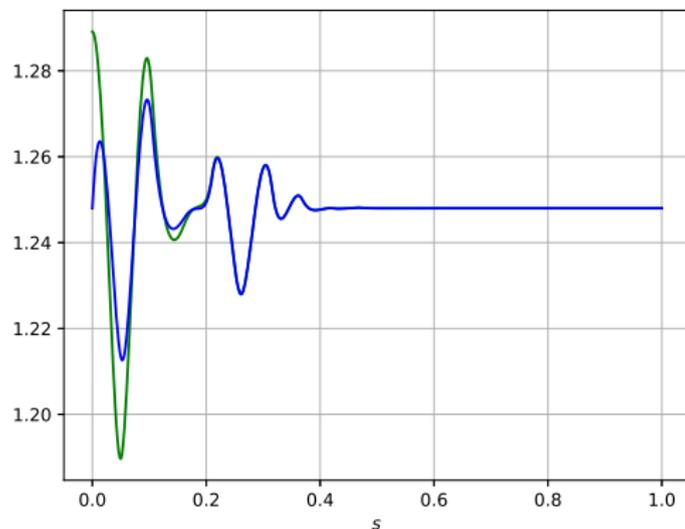
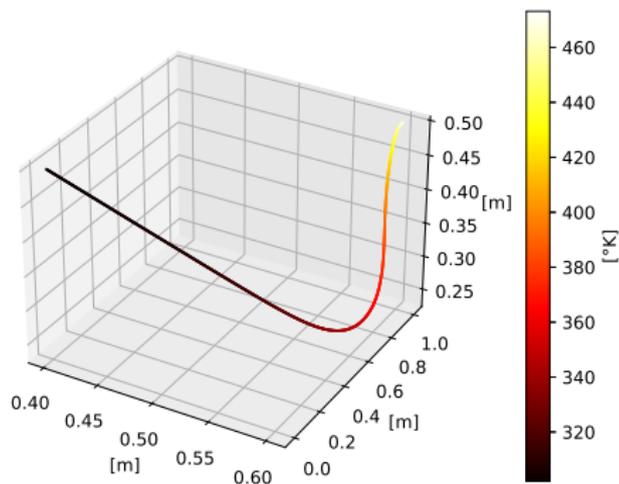


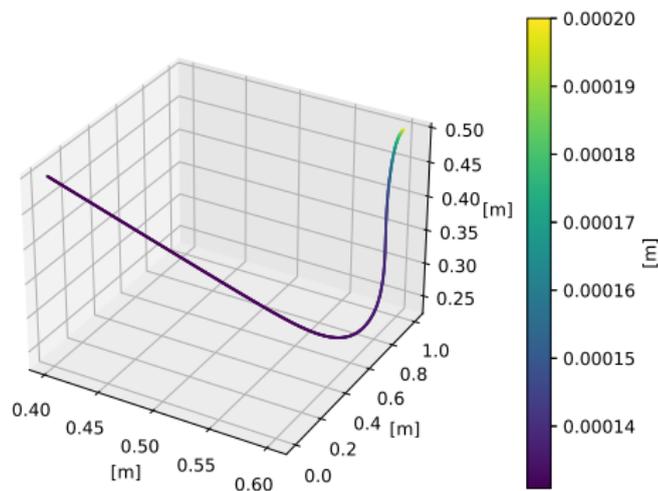
Abbildung: Fehler bei Bézier-Interpolation mit natürlichen und Hermite-Randbedingungen bei Kurvenparameter  $s$ .



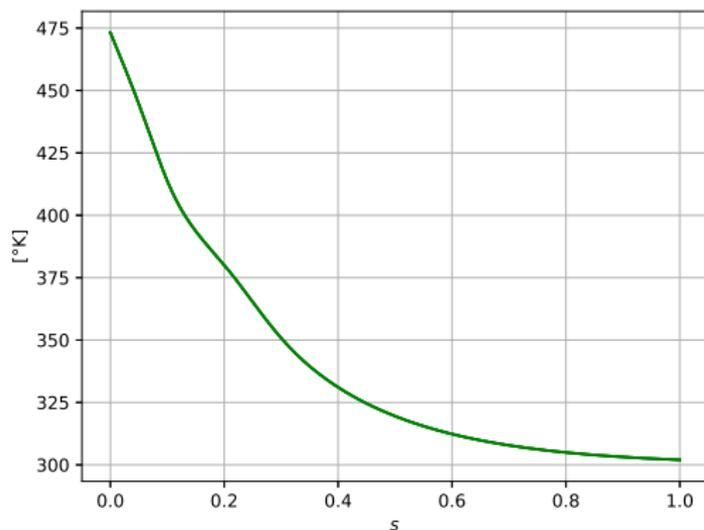
**Abbildung:** Norm der ersten Ableitung des interpolierenden Splines mit natürlichen und Hermite-Randbedingungen bei Kurvenparameter  $s$  ( $|s'_f(s)|$ ).



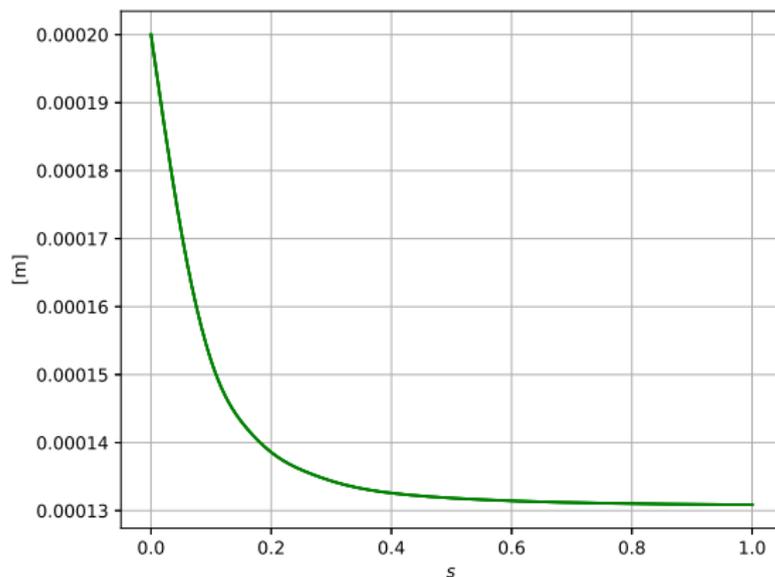
**Abbildung:** Durch Bézier-Kurven mit Hermite-Randbedingungen interpolierter Faden mit durch Bézier-Kurven mit natürlichen Randbedingungen interpolierter Temperatur.



**Abbildung:** Durch Bézier-Kurven mit Hermite-Randbedingungen interpolierter Faden mit durch Bézier-Kurven mit natürlichen Randbedingungen interpolierter Fadendicke.



**Abbildung:** Durch Bézier-Kurven mit natürlichen Randbedingungen interpolierte Temperatur bei Kurvenparameter  $s$ .



**Abbildung:** Durch Bézier-Kurven mit natürlichen Randbedingungen interpolierte Dicke bei Kurvenparameter  $s$ .

## Satz

Sei  $f \in C^2[a, b]$  und sei  $s_f \in S_3(\Delta_n)$  der interpolierende Spline mit natürlichen oder mit Hermite-Randbedingungen. Dann hat  $s_f$  unter allen interpolierenden  $C^2$ -Funktionen die geringste Krümmung, also

$$\|s_f''\|_2 \leq \|h''\|_2, \quad \forall h \in \{g \in C^2[a, b] : g(x_j) = f(x_j) \text{ für } j = 0, \dots, n\}.$$

## Satz

Sei  $f \in C^2[a, b]$  und sei  $s_f \in S_3(\Delta_n)$  der interpolierende Spline mit natürlichen oder mit Hermite-Randbedingungen. Dann hat  $s_f$  unter allen interpolierenden  $C^2$ -Funktionen die geringste Krümmung, also

$$\|s_f''\|_2 \leq \|h''\|_2, \quad \forall h \in \{g \in C^2[a, b] : g(x_j) = f(x_j) \text{ für } j = 0, \dots, n\}.$$

## Erinnerung

$$\|f'' - s''\|_2^2 = \|f''\|_2^2 - \|s''\|_2^2 - 2 \left( [f' - s']s'' \right) (x) \Big|_{x=a}^b$$

## Satz

Sei  $f \in C^2[a, b]$  und sei  $s_f \in S_3(\Delta_n)$  der interpolierende Spline mit natürlichen oder mit Hermite-Randbedingungen. Dann hat  $s_f$  unter allen interpolierenden  $C^2$ -Funktionen die geringste Krümmung, also

$$\|s_f''\|_2 \leq \|h''\|_2, \quad \forall h \in \{g \in C^2[a, b] : g(x_j) = f(x_j) \text{ für } j = 0, \dots, n\}.$$

## Erinnerung

$$\|f'' - s''\|_2^2 = \|f''\|_2^2 - \|s''\|_2^2 - 2 \left( [f' - s']s'' \right) (x) \Big|_{x=a}^b$$

## Beweis

Bei natürlichen oder Hermite-Randbedingungen verschwindet der letzte Summand, also

$$\|f'' - s''\|_2^2 = \|f''\|_2^2 - \|s''\|_2^2,$$

damit ergibt sich die Behauptung.

## Satz

Sei  $f \in C^4[a, b]$  mit  $f''(a) = f''(b) = 0$  und  $s_f \in S_3(\Delta_n)$  sei der interpolierende kubische Spline mit natürlichen Randbedingungen. Dann gilt

$$\|s_f - f\|_\infty \leq \frac{7}{8} \frac{h_{\max}}{h_{\min}} \|f^{(4)}\|_\infty h_{\max}^4$$

$$\|s_f' - f'\|_\infty \leq \frac{7}{4} \frac{h_{\max}}{h_{\min}} \|f^{(4)}\|_\infty h_{\max}^3$$

$$\|s_f'' - f''\|_\infty \leq \frac{7}{4} \frac{h_{\max}}{h_{\min}} \|f^{(4)}\|_\infty h_{\max}^2$$

$$|s_f^{(3)}(x) - f^{(3)}(x)| \leq 2 \|f^{(4)}\|_\infty h_{\max} \quad (x \neq x_j).$$

## Satz

Sei  $f \in C^4[a, b]$  und  $s_f \in S_3(\Delta_n)$  sei der interpolierende kubische Spline mit Hermite-Randbedingungen. Weiterhin sei  $s^f \in S_1(\Delta_n)$  derjenige lineare Spline, der die Funktion  $f$  interpoliert. Dann gilt

$$\|f - s^f\|_\infty \leq \frac{1}{8} h_{\max}^2 \|f''\|_\infty \quad (\text{i})$$

$$\|s_f''\|_\infty \leq 3 \|f''\|_\infty \quad (\text{ii})$$

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4 \|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq \frac{1}{2} h_{\max}^2 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (\text{iv})$$

$$\|f' - s_f'\|_\infty \leq \frac{1}{2} h_{\max}^3 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (\text{v})$$

$$\|f - s_f\|_\infty \leq \frac{1}{16} h_{\max}^4 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (\text{vi})$$

## Erinnerung

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

## Beweis

Beweis nur auszugsweise, wir zeigen (iii), (iv) und (vi)

## Erinnerung

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

## Vorarbeit

Definiere zu dem linearen Spline  $s \in S_1(\Delta_n)$  die Funktion  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt.$$

## Erinnerung

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

## Vorarbeit

Definiere zu dem linearen Spline  $s \in S_1(\Delta_n)$  die Funktion  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt.$$

Rechne

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x)$$

## Erinnerung

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

## Vorarbeit

Definiere zu dem linearen Spline  $s \in S_1(\Delta_n)$  die Funktion  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt.$$

Rechne

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x (x-t)s(t) dt$$

## Erinnerung

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

## Vorarbeit

Definiere zu dem linearen Spline  $s \in S_1(\Delta_n)$  die Funktion  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt.$$

Rechne

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x (x-t)s(t) dt \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left( x \int_a^x s(t) dt - \int_a^x ts(t) dt \right) \end{aligned}$$

## Erinnerung

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

## Vorarbeit

Definiere zu dem linearen Spline  $s \in S_1(\Delta_n)$  die Funktion  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt.$$

Rechne

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x (x-t)s(t) dt \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left( x \int_a^x s(t) dt - \int_a^x ts(t) dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( xs(x) + \int_a^x s(t) dt - xs(x) \right) \end{aligned}$$

## Erinnerung

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

## Vorarbeit

Definiere zu dem linearen Spline  $s \in S_1(\Delta_n)$  die Funktion  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt.$$

Rechne

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x (x-t)s(t) dt \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left( x \int_a^x s(t) dt - \int_a^x ts(t) dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( xs(x) + \int_a^x s(t) dt - xs(x) \right) = \frac{d}{dx} \int_a^x s(t) dt \end{aligned}$$

## Erinnerung

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

## Vorarbeit

Definiere zu dem linearen Spline  $s \in S_1(\Delta_n)$  die Funktion  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt.$$

Rechne

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x (x-t)s(t) dt \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left( x \int_a^x s(t) dt - \int_a^x ts(t) dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( xs(x) + \int_a^x s(t) dt - xs(x) \right) = \frac{d}{dx} \int_a^x s(t) dt \\ &= s(x) \end{aligned}$$

## Erinnerung

$$\|s''_f\|_\infty \leq 3\|f''\|_\infty \quad (\text{ii})$$

$$\|f'' - s''_f\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt, \quad u'' \equiv s$$

## Erinnerung

$$\|s_f''\|_\infty \leq 3\|f''\|_\infty \quad (\text{ii})$$

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt, \quad u'' \equiv s$$

## Beweis

Es ist wegen  $u \in C^2[a, b]$  also  $u \in S_3(\Delta_n)$ . Offenbar ist  $s_u \equiv u$  und  $s_{f-u} \equiv s_f - s_u$ . Rechne mit (ii)

$$\|f'' - s_f''\|_\infty$$

## Erinnerung

$$\|s_f''\|_\infty \leq 3\|f''\|_\infty \quad (\text{ii})$$

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt, \quad u'' \equiv s$$

## Beweis

Es ist wegen  $u \in C^2[a, b]$  also  $u \in S_3(\Delta_n)$ . Offenbar ist  $s_u \equiv u$  und  $s_{f-u} \equiv s_f - s_u$ . Rechne mit (ii)

$$\|f'' - s_f''\|_\infty = \|(f-u)'' - s_{f-u}''\|_\infty$$

## Erinnerung

$$\|s_f''\|_\infty \leq 3\|f''\|_\infty \quad (\text{ii})$$

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt, \quad u'' \equiv s$$

## Beweis

Es ist wegen  $u \in C^2[a, b]$  also  $u \in S_3(\Delta_n)$ . Offenbar ist  $s_u \equiv u$  und  $s_{f-u} \equiv s_f - s_u$ . Rechne mit (ii)

$$\|f'' - s_f''\|_\infty = \|(f-u)'' - s_{f-u}''\|_\infty \leq \|(f-u)''\|_\infty + \|s_{f-u}''\|_\infty$$

## Erinnerung

$$\|s_f''\|_\infty \leq 3\|f''\|_\infty \quad (\text{ii})$$

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt, \quad u'' \equiv s$$

## Beweis

Es ist wegen  $u \in C^2[a, b]$  also  $u \in S_3(\Delta_n)$ . Offenbar ist  $s_u \equiv u$  und  $s_{f-u} \equiv s_f - s_u$ . Rechne mit (ii)

$$\begin{aligned} \|f'' - s_f''\|_\infty &= \|(f-u)'' - s_{f-u}''\|_\infty \leq \|(f-u)''\|_\infty + \|s_{f-u}''\|_\infty \\ &\leq 4\|f'' - u''\|_\infty \end{aligned}$$

## Erinnerung

$$\|s_f''\|_\infty \leq 3\|f''\|_\infty \quad (\text{ii})$$

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq 4\|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

$$u(x) := \int_a^x (x-t)s(t) dt, \quad u'' \equiv s$$

## Beweis

Es ist wegen  $u \in C^2[a, b]$  also  $u \in S_3(\Delta_n)$ . Offenbar ist  $s_u \equiv u$  und  $s_{f-u} \equiv s_f - s_u$ . Rechne mit (ii)

$$\begin{aligned} \|f'' - s_f''\|_\infty &= \|(f-u)'' - s_{f-u}''\|_\infty \leq \|(f-u)''\|_\infty + \|s_{f-u}''\|_\infty \\ &\leq 4\|f'' - u''\|_\infty = 4\|f'' - s\|_\infty \end{aligned}$$

## Erinnerung

$$\|f - s^f\|_\infty \leq \frac{1}{8} h_{\max}^2 \|f''\|_\infty \quad (\text{i})$$

$$\|f'' - s''_f\|_\infty \leq 4 \|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

$$\|f'' - s''_f\|_\infty \leq \frac{1}{2} h_{\max}^2 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (\text{iv})$$

## Erinnerung

$$\|f - s^f\|_\infty \leq \frac{1}{8} h_{\max}^2 \|f''\|_\infty \quad (\text{i})$$

$$\|f'' - s''_f\|_\infty \leq 4 \|f'' - s\|_\infty \text{ für alle } s \in S_1(\Delta_n) \quad (\text{iii})$$

$$\|f'' - s''_f\|_\infty \leq \frac{1}{2} h_{\max}^2 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (\text{iv})$$

## Beweis

Setze in (iii) für  $s$  den interpolierenden linearen Spline  $s^{f''}$  ein, so ergibt sich die Behauptung mit (i)

## Erinnerung

$$\|f - s_f\|_\infty \leq \frac{1}{8} h_{\max}^2 \|f''\|_\infty \quad (\text{i})$$

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq \frac{1}{2} h_{\max}^2 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (\text{iv})$$

$$\|f - s_f\|_\infty \leq \frac{1}{16} h_{\max}^4 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (\text{vi})$$

## Beweis (vi)

- Wegen  $(f - s_f)(x_j) = 0$  für  $j = 0, \dots, n$  verschwindet der  $f - s_f$  interpolierende lineare Spline überall

## Erinnerung

$$\|f - s_f\|_\infty \leq \frac{1}{8} h_{\max}^2 \|f''\|_\infty \quad (\text{i})$$

$$\|f'' - s_f''\|_\infty \leq \frac{1}{2} h_{\max}^2 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (\text{iv})$$

$$\|f - s_f\|_\infty \leq \frac{1}{16} h_{\max}^4 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (\text{vi})$$

## Beweis (vi)

- Wegen  $(f - s_f)(x_j) = 0$  für  $j = 0, \dots, n$  verschwindet der  $f - s_f$  interpolierende lineare Spline überall
- Mit (i) und (iv) erhalten wir

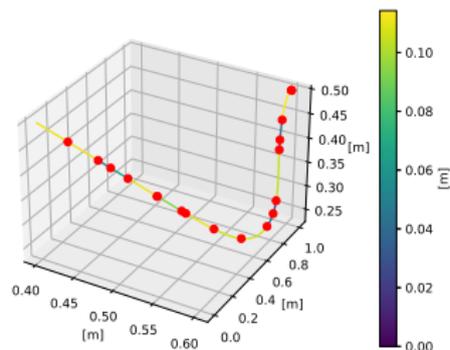
$$\|(f - s_f) - 0\|_\infty \stackrel{(\text{i})}{\leq} \frac{h_{\max}^2}{8} \|(f - s_f)''\|_\infty \stackrel{(\text{iv})}{\leq} \frac{h_{\max}^4}{16} \|f^{(4)}\|_\infty$$

## Fazit Fehlerabschätzungen

- Einige Fehlerabschätzungen nachgewiesen

## Fazit Fehlerabschätzungen

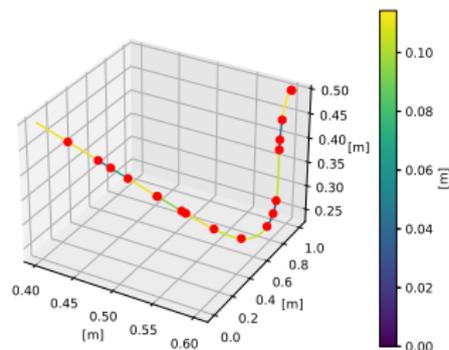
- Einige Fehlerabschätzungen nachgewiesen
- Fehler von Ordnung  $\mathcal{O}(h_{\max}^4)$  bestätigt uns in der Wahl von Splines als interpolierende Funktion



**Abbildung:** Die Länge der Kurve in den jeweiligen Gitterelementen und die Schnittpunkte mit den Gitterflächen wurden farblich markiert

## Achsenparalleles Würfelgitter

- Problem gelöst am achsenparallelen Würfelgitter, welches durch den Ursprung geht



**Abbildung:** Die Länge der Kurve in den jeweiligen Gitterelementen und die Schnittpunkte mit den Gitterflächen wurden farblich markiert

## Achsenparalleles Würfelgitter

- Problem gelöst am achsenparallelen Würfelgitter, welches durch den Ursprung geht
- Gitterschnittpunkte  $y_j$  können analytisch gefunden werden

## Motivation

Würfelgitter ist nicht der allgemeinste Fall, also *Parallelepipедgitter*

## Motivation

Würfelgitter ist nicht der allgemeinste Fall, also *Parallelepipедgitter*

## Parallelepipедgitter generieren

- Wähle Startpunkt  $s_0 \in \mathbb{R}^3$  und drei linear unabhängige Vektoren  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$

## Motivation

Würfeligitter ist nicht der allgemeinste Fall, also *Parallelepipedgitter*

## Parallelepipedgitter generieren

- Wähle Startpunkt  $s_0 \in \mathbb{R}^3$  und drei linear unabhängige Vektoren  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$
- $0 \leq \lambda_0^{(x)} < \dots < \lambda_n^{(x)} \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda_0^{(y)} < \dots < \lambda_n^{(y)} \leq 1$  und  $0 \leq \lambda_0^{(z)} < \dots < \lambda_n^{(z)} \leq 1$  gegeben (später zufällig generiert)

## Motivation

Würfeligitter ist nicht der allgemeinste Fall, also *Parallelepipedgitter*

## Parallelepipedgitter generieren

- Wähle Startpunkt  $s_0 \in \mathbb{R}^3$  und drei linear unabhängige Vektoren  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$
- $0 \leq \lambda_0^{(x)} < \dots < \lambda_n^{(x)} \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda_0^{(y)} < \dots < \lambda_n^{(y)} \leq 1$  und  $0 \leq \lambda_0^{(z)} < \dots < \lambda_n^{(z)} \leq 1$  gegeben (später zufällig generiert)
- Konstruiere Gitterpunkte  $G$  als

$$G := \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{x} = \lambda_i^{(x)} x + \lambda_j^{(y)} y + \lambda_k^{(z)} z + s_0, \text{ wobei } 0 \leq i, j, k \leq n\}$$

## Finden des enthaltenden Elements

- Punkt  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$  gegeben

## Numerische Optimierung im Fall einer Kurve

## Finden des enthaltenden Elements

- Punkt  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$  gegeben
- Setze  $\tilde{x}_0 := \tilde{x} - s_0$ ,  $A = (x|y|z)$  und berechne  $\lambda = A^{-1}\tilde{x}_0$

## Numerische Optimierung im Fall einer Kurve

## Finden des enthaltenden Elements

- Punkt  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$  gegeben
- Setze  $\tilde{x}_0 := \tilde{x} - s_0$ ,  $A = (x|y|z)$  und berechne  $\lambda = A^{-1}\tilde{x}_0$
- Enthaltendes Gitterelement ergibt sich durch Vergleich der  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  mit den  $\lambda_j^{(x)}, \lambda_j^{(y)}, \lambda_j^{(z)}$

## Numerische Optimierung im Fall einer Kurve

## Finden des enthaltenen Elements

- Punkt  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$  gegeben
- Setze  $\tilde{x}_0 := \tilde{x} - s_0$ ,  $A = (x|y|z)$  und berechne  $\lambda = A^{-1}\tilde{x}_0$
- Enthaltendes Gitterelement ergibt sich durch Vergleich der  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  mit den  $\lambda_j^{(x)}, \lambda_j^{(y)}, \lambda_j^{(z)}$

## Numerische Optimierung im Fall einer Kurve

- Angenommen, wir haben bereits das enthaltende Gitterelement von  $s_f(j/n)$  bestimmt

## Finden des enthaltenden Elements

- Punkt  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$  gegeben
- Setze  $\tilde{x}_0 := \tilde{x} - s_0$ ,  $A = (x|y|z)$  und berechne  $\lambda = A^{-1}\tilde{x}_0$
- Enthaltendes Gitterelement ergibt sich durch Vergleich der  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  mit den  $\lambda_j^{(x)}, \lambda_j^{(y)}, \lambda_j^{(z)}$

## Numerische Optimierung im Fall einer Kurve

- Angenommen, wir haben bereits das enthaltende Gitterelement von  $s_f(j/n)$  bestimmt
- Überprüfe für  $s_f((j+1)/n)$  nun zunächst, ob es weiterhin im selben Gitterelement liegt

## Finden des enthaltenden Elements

- Punkt  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$  gegeben
- Setze  $\tilde{x}_0 := \tilde{x} - s_0$ ,  $A = (x|y|z)$  und berechne  $\lambda = A^{-1}\tilde{x}_0$
- Enthaltendes Gitterelement ergibt sich durch Vergleich der  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  mit den  $\lambda_j^{(x)}, \lambda_j^{(y)}, \lambda_j^{(z)}$

## Numerische Optimierung im Fall einer Kurve

- Angenommen, wir haben bereits das enthaltende Gitterelement von  $s_f(j/n)$  bestimmt
- Überprüfe für  $s_f((j+1)/n)$  nun zunächst, ob es weiterhin im selben Gitterelement liegt
- Dann überprüfe alle  $3^3 - 1 = 26$  Nachbarn

## Finden des enthaltenden Elements

- Punkt  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$  gegeben
- Setze  $\tilde{x}_0 := \tilde{x} - s_0$ ,  $A = (x|y|z)$  und berechne  $\lambda = A^{-1}\tilde{x}_0$
- Enthaltendes Gitterelement ergibt sich durch Vergleich der  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  mit den  $\lambda_j^{(x)}, \lambda_j^{(y)}, \lambda_j^{(z)}$

## Numerische Optimierung im Fall einer Kurve

- Angenommen, wir haben bereits das enthaltende Gitterelement von  $s_f(j/n)$  bestimmt
- Überprüfe für  $s_f((j+1)/n)$  nun zunächst, ob es weiterhin im selben Gitterelement liegt
- Dann überprüfe alle  $3^3 - 1 = 26$  Nachbarn
- Erst wenn beide diese Tests nicht anschlagen: Alle anderen durchsuchen

## Erste Ergebnisse

- Wir werden die Splinekurve an sehr vielen Punkten aus und ermitteln für jeden Punkt das enthaltende Gitterelement

## Erste Ergebnisse

- Wir werden die Splinekurve an sehr vielen Punkten aus und ermitteln für jeden Punkt das enthaltende Gitterelement
- Die Resultate tragen wir in eine Tabelle ein

## Erste Ergebnisse

- Wir werden die Splinekurve an sehr vielen Punkten aus und ermitteln für jeden Punkt das enthaltende Gitterelement
- Die Resultate tragen wir in eine Tabelle ein
- Noch keine Grundlage für numerische Integration, da  $|s'_f|$  nicht notwendigerweise konstant

## Erste Ergebnisse

- Wir werden die Splinekurve an sehr vielen Punkten aus und ermitteln für jeden Punkt das enthaltende Gitterelement
- Die Resultate tragen wir in eine Tabelle ein
- Noch keine Grundlage für numerische Integration, da  $|s'_f|$  nicht notwendigerweise konstant
- Man müsste  $|s'_f(x)|$  noch einfließen lassen

Tabelle: *Auszug!* Resultat der Methoden am Parallelepipedgitter.

Gitterelementindex	Anzahl Elemente darin
3249	77
3269	32
3289	64
3309	6
3327	13
3328	16
3329	2
3347	2
3366	2
3367	8
⋮	⋮

## Resultate

- Grundlegende Resultate zur Splineinterpolation mittels Bézier-Kurven

## Offene Probleme

*Euch ist bekannt, was wir bedürfen, Wir wollen stark Getränke schlürfen*

~Johann Wolfgang von Goethe

## Resultate

- Grundlegende Resultate zur Splineinterpolation mittels Bézier-Kurven
- Fehlerabschätzungen und Minimaleigenschaften

## Offene Probleme

*Euch ist bekannt, was wir bedürfen, Wir wollen stark Getränke schlürfen*

~Johann Wolfgang von Goethe

## Resultate

- Grundlegende Resultate zur Splineinterpolation mittels Bézier-Kurven
- Fehlerabschätzungen und Minimaleigenschaften
- Entwicklung numerischer Methoden, mit denen das eingangs gestellte Problem am Würfelgitter vollständig gelöst werden kann

## Offene Probleme

*Euch ist bekannt, was wir bedürfen, Wir wollen stark Getränke schlürfen*

~Johann Wolfgang von Goethe

## Resultate

- Grundlegende Resultate zur Splineinterpolation mittels Bézier-Kurven
- Fehlerabschätzungen und Minimaleigenschaften
- Entwicklung numerischer Methoden, mit denen das eingangs gestellte Problem am Würfelgitter vollständig gelöst werden kann

## Offene Probleme

- Analytisches Finden von Schnittstellen kubischer Splines mit einem Parallelepipedgitter

*Euch ist bekannt, was wir bedürfen, Wir wollen stark Getränke schlürfen*

~Johann Wolfgang von Goethe

## Resultate

- Grundlegende Resultate zur Splineinterpolation mittels Bézier-Kurven
- Fehlerabschätzungen und Minimaleigenschaften
- Entwicklung numerischer Methoden, mit denen das eingangs gestellte Problem am Würfelgitter vollständig gelöst werden kann

## Offene Probleme

- Analytisches Finden von Schnittstellen kubischer Splines mit einem Parallelepipedit
- Noch allgemeinere Gitter

*Euch ist bekannt, was wir bedürfen, Wir wollen stark Getränke schlürfen*

~Johann Wolfgang von Goethe